

COMITATO NAZIONALE PER L'ENERGIA NUCLEARE
Laboratori Nazionali di Frascati

INF-62/40

M.A. Locci: RISOLUZIONE NUMERICA DI EQUAZIONI DI POISSON
MEDIANTE CALCOLATORE I.B.M. 1620 (METODI ALLE DIFFERENZE,
ITERATIVO, DI MONTE CARLO).

Nota interna: n° 138
18 Maggio 1962

M.A. Locci: RISOLUZIONE NUMERICA DI EQUAZIONI DI POISSON MEDIANTE
CALCOLATORE I.B.M. 1620 (Metodi alle differenze, ite-
rativo, di Monte Carlo).
(Nota interna n° 138)

ERRATA - CORRIGE

Pag. 1, 12^a riga dal basso:

togliere il punto ed inserire:

"per i metodi alle differenze ed iterativo, mentre per
il metodo di Monte Carlo, quando la particolare equa-
zione in studio non sia definita in una regione quadra-
ta o rettangolare, occorre modificare gli statements
compresi fra i labels PARTE e VIA-12, CØLIMI e SCØ4-12
secondo le esigenze dettate dalla particolare regione
di definizione."

Pag. 2, 17^a riga dall'alto:

al posto di .3% mettere .03%

Pag. 7, ultima riga:

al posto di 2% " .2%

Pag. 9, 10^a riga dall'alto:

al posto di P_i " P_r

Pag. 9, 7^a riga dal basso:

al posto di $p_i(P)$ " $p_r(P)$

Pag. 10, 7^a riga dall'alto:

al posto di P " P_c

Pag. 12, 4^a riga dal basso:

al posto di "per porre" " "perfora"

Tabella II, ultima riga:

al posto di -5400.00 " -54000.00

Lista del programma "metodo alle differenze"

5 foglio (pag. 22), 22^a riga:

al posto di DØ13 mettere DOI3

ultimo foglio (pag. 24), 3^a, 4^a e 5^a riga:

alla fine di ogni ordine mettere (a)

14.6.1962.

LNF-62/40

Nota interna: n° 138
18 Maggio 1962

M.A. Locci: RISOLUZIONE NUMERICA DI EQUAZIONI DI POISSON ME
DIANTE CALCOLATORE I.B.M. 1620 (METODI ALLE DIFFERENZE, I-
TERATIVO, DI MONTE CARLO).

1) Introduzione

Nel presente lavoro sono dati tre programmi rela-
tivi alla risoluzione di una particolare equazione di Pois-
son.

E' tuttavia possibile applicarli alla soluzione
di altre equazioni di questo tipo senza dover fare alcuna
modifica del programma.

Naturalmente i metodi alle differenze ed iterati-
vo che qui sono stati programmati, si possono applicare an-
che alla risoluzione numerica di equazioni di Laplace.

E' consigliabile che i dati ottenuti col metodo
alle differenze vengano presi come dati iniziali per il me-
todo iterativo, questo perchè il primo metodo fornisce ri-
sultati di basso ordine di approssimazione (sia a causa del-
la propagazione degli errori che a causa del fatto che ogni
punto è affetto da un errore dipendente, come vedremo, dal
passo) mentre per avere una rapida convergenza col metodo
iterativo occorre partire da valori non troppo lontani da

quelli veri. Perciò si è fatto in modo che i valori ottenuti col metodo delle differenze possano venir perforati sul nastro con la stessa sequenza con cui saranno letti e memorizzati dal programma successivo (metodo iterativo). I risultati numerici sono stati confrontati con quelli dello stesso problema⁽¹⁾ risolto mediante il "relaxation method". Asservendo nel modo detto il metodo delle differenze a quello iterativo, con circa un'ora di elaborazione si sono ottenuti 96 risultati con uno scarto massimo del .2% rispetto all'esempio citato⁽¹⁾. Si richiede però che la regione in cui è definita l'equazione sia o quadrata o rettangolare.

Col metodo di Montecarlo, invece, non si hanno problemi riguardanti la conformazione della regione di definizione, a prezzo di concentrare tutto il lavoro numerico per il calcolo di un solo punto della regione; il metodo richiede un notevole tempo di macchina (un risultato, cioè un punto, con un errore di .3% ha richiesto un'ora di elaborazione).

La particolare equazione trattata qui a titolo di esempio è

$$(1) \quad \nabla^2 u(x,y) = w(x,y)$$

con le seguenti condizioni al contorno:

$$u(x,y) = \frac{100}{12} [24x^3 - x^4 - 1728x] \text{ sulle rette } y=0; y=8$$

$$u(x,y) = \frac{100}{12} [16y^3 - y^4 - 512y] \text{ sulle rette } x=0; x=12$$

$w(x,y)$ è la risoluzione di una particolare equazione di Laplace tabellata in ⁽¹⁾; chiameremo "regione R" quella parte di piano (racchiusa, nel nostro caso, dalle rette $y = 0$; $y = 8$; $x = 0$; $x = 12$) in cui si cerca la soluzione della

(1).

Il calcolatore usato è una unità base 1620 IBM senza nessun dispositivo speciale.

2) Metodo delle differenze ed iterativo

Ricoperta la regione R con una rete di maglie di ampiezza h e k nelle direzioni degli assi x ed y rispettivamente e sostituendo, nella (1), alle derivate parziali le rispettive differenze finite (discretizzazione della (1)), si ottiene.

$$(2) \quad 2u(x,y) \left[1 + \frac{h^2}{2k^2} \right] + h^2 w(x,y) = u(x+h,y) + u(x-h,y) + \frac{h^2}{k^2} [u(x,y+k) + u(x,y-k)]$$

Per poterci servire di questa rappresentazione, occorre vedere se essa è stabile e consistente.

La stabilità viene assicurata dalla rappresentazione implicita che è risaputo essere sempre incondizionatamente stabile.

La consistenza viene provata sostituendo, nella (2), lo sviluppo in serie di Taylor delle funzioni che vi compaiono a secondo membro.

Si ha così:

$$(3) \quad \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{2h^2}{4!} \frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^4} + \frac{2h^4}{6!} \frac{\partial^6 u(x,y)}{\partial x^6} + \dots$$
$$+ \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \frac{2h^2}{4!} \frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial y^4} + \frac{2h^4}{6!} \frac{\partial^6 u(x,y)}{\partial y^6} + \dots = w(x,y)$$

in cui si è posto $k = h$ grazie alla stabilità incondizionata.

La (3) mostra che per h tendente a zero si ottiene la (1); ci fornisce, inoltre, l'ordine di grandezza dell'errore commesso con la discretizzazione della (1). Se

h è sufficientemente piccolo, il maggior contributo all'errore è dato dai termini in cui compare la derivata quarta.

Nel caso in esame, si è posto $h = k = 1$ e così si è ottenuto:

$$(4) \quad u(x,y) = \frac{1}{6} [u(x+h,y) + u(x-h,y) + u(x,y+h) + u(x,y-h) - h^2 w(x,y)]$$

La (4) permette di risolvere la $u(x,y)$ in tutti i nodi del reticolo mediante la risoluzione di un sistema non omogeneo di n equazioni lineari in n incognite (n = numero di nodi interni ad R).

Si ottiene però una soluzione diretta osservando che ruotando gli assi di $\pi/4$ si ha una equazione del tipo:

$$(5) \quad u(x,y) = \frac{1}{4} [u(x+l,y) + u(x-l,y) + u(x,y+l) + u(x,y-l) - l^2 w(x,y)]$$

con $l = h\sqrt{2}$ che, combinata con la (4), rende immediato il calcolo delle $u(x,y)$ incognite.

Per quanto riguarda il metodo iterativo esso è abbastanza noto e pertanto non verrà qui descritto in dettaglio; ricorderemo soltanto che, per avere una rapida convergenza, occorre partire con valori il più possibile vicini a quelli veri. Questo implica l'applicazione del metodo delle differenze fin qui descritto.

3) Descrizione del programma "Metodo delle differenze"

Il programma è spiegato in dettaglio nel diagramma a blocchi allegato. Occupa 5835 posizioni di memoria essendo stato compilato in S.P.S. per poter disporre del maggior numero possibile di locazioni per la memorizzazione delle $u(x,y)$, ciò che è molto importante per la precisione quando si voglia usare solo questo metodo. Le memorie con

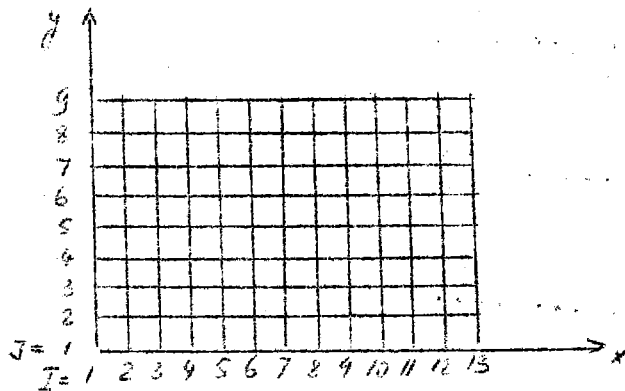
indirizzo compreso fra 12981 e 19990 sono riservate alla memorizzazione delle $u(x,y)$; quelle con indirizzo compreso fra 5971 e 12980 sono riservate alla memorizzazione delle $w(x,y)$.

I numeri NX1 ed NY1 di maglie nelle direzioni degli assi deve essere dato con quattro digits di cui il primo col flag.

Nel nostro caso, essendo $h = 1$, sono $\bar{0}008$ e $\bar{0}012$ nelle direzioni y ed x rispettivamente.

E' naturale che il numero di parti in cui è suddivisa la regione R , in almeno una delle direzioni, deve essere del tipo 2^m con m intero.

Per chiarezza numeriamo le suddivisioni come in figura,



in modo che le $u(x,y)$ e le $w(x,y)$ vengono individuate da due indici I e J , cioè

$$u(0,0) \equiv u_{11}; u(h,h) \equiv u_{22}; \dots$$

$$w(h,h) = w_{22}; w(h,2h) \equiv w_{23}; \dots$$

e così via.

I valori al contorno vengono letti a programma mediante nastro nell'ordine seguente:

$$J = 1$$

$$I = 1, 2, \dots, 13$$

J = 9

I = 1, 2,, 13

I = 1

J = 2,, 8

I = 13

J = 2,, 8

e vengono memorizzati a partire dalla memoria con indirizzo 19990 via via verso quelle con indirizzo più basso; le w_{ij} vengono lette e memorizzate dalla memoria con indirizzo 12980 verso quelle con indirizzo più basso secondo l'ordine seguente:

J = 2

I = 2,, 12

J = 3

I = 2,, 12

(6)

.....

.....

.....

.....

J = 8

I = 2,, 12

Dopo ogni dato bisogna mettere un end of line (in tutto 117 ends of line).

Lo switch overflow deve stare in program.

Lo switch 1 permette la perforazione dei risultati che possono usarsi per il successivo procedimento iterativo. In ogni caso stampa e perforazione dei risultati avvengono secondo l'ordine:

J = 1

I = 1,, 13

J = 2
I = 1,.....,13
.....
.....
.....
(6')
.....
.....
.....
.....
.....
J = 9
I = 1,.....,13

4) Descrizione del programma "Metodo iterativo"

Anche questo programma è stato compilato in S.P.S. ed occupa 4320 posizioni di memoria; le memorie con indirizzo compreso fra 5971 e 12980 vengono occupate dalle w_{ij} ; il numero NX1 ed NY1 di maglie nelle direzioni degli assi deve essere dato con quattro digits di cui il primo col flag. L'introduzione dei valori delle u_{ij} e la loro stampa a processo ultimato avvengono secondo la sequenza (6').

Nel diagramma a blocchi si ha una visione dettagliata del programma.

Lo switch 1 permette la stampa dei risultati intermedi (cioè i risultati di ogni iterazione, preceduti dal numero d'ordine della iterazione).

Nelle tabelle I e II sono dati i risultati ottenuti rispettivamente col metodo delle differenze ed iterativo; questi ultimi, confrontati con quelli ottenuti in (1) col metodo della rilassazione, hanno dato uno scarto massimo di 2%.

5) Metodo di Montecarlo⁽⁴⁾

Prendiamo ora la più generale equazione differenziale a derivate parziali di secondo ordine, con variabili indipendenti x ed y

$$(7) \quad A(x,y) \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + B(x,y) \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + C(x,y) \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + D(x,y) \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + E(x,y) \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = F(x,y)$$

che è di tipo ellittico se per qualunque x ed y si ha $B^2 - 4AC < 0$; e consideriamola assieme alle sue condizioni al contorno.

L'equazione alle differenze associate alla (7) è

$$(8) \quad \begin{aligned} u(x,y) = & \frac{C(x,y)}{M(x,y)} u(x+h,y+h) + \frac{B(x,y) - C(x,y) + hE(x,y)}{M(x,y)} u(x,y+h) + \\ & + \frac{B(x,y)}{M(x,y)} u(x,y-h) + \frac{A(x,y) - C(x,y) - hD(x,y)}{M(x,y)} u(x+h,y) + \\ & + \frac{A(x,y) - C(x,y)}{M(x,y)} u(x-h,y) - h^2 \frac{F(x,y)}{M(x,y)} \end{aligned}$$

in cui

$$M(x,y) = 2A(x,y) + 2B(x,y) - 2C(x,y) + hD(x,y) + hE(x,y).$$

Indicando con P il generico punto di coordinate x,y e con P_r quelli a lui più vicini. Posto:

$$(9) \quad \begin{aligned} p_1(P) &= \frac{C(x,y)}{M(x,y)} & p_2(P) &= \frac{B(x,y) - C(x,y) + hE(x,y)}{M(x,y)} \\ p_3(P) &= \frac{B(x,y)}{M(x,y)} & p_4(P) &= \frac{A(x,y) - C(x,y) - hD(x,y)}{M(x,y)} \\ p_5(P) &= \frac{A(x,y) - C(x,y)}{M(x,y)} \end{aligned}$$

la (8) può scriversi:

$$(10) \quad u(P) = \sum_r^5 p_r(P) u(P_r) - h^2 \frac{F(P)}{M(P)}$$

TABELLA I

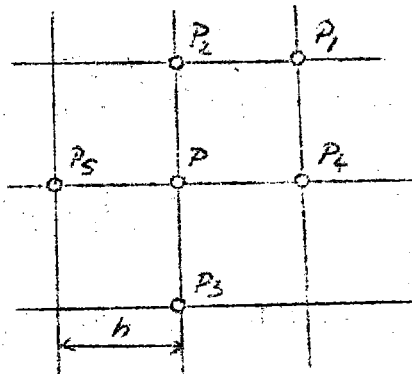
Y	-10666.67	-20862.164	-30127.43	-38215.967	-42890.5	-47547.72	-48758.965	
J								
5	-9875	-20319.837	-30174.817	-38756.737	-44639.825	-48747.575	-51860.157	
4	-7600.00	-18918.29	-29271.58	-38626.942	-45436.36	-50092.535	-51875.142	
3	-4142.00	-16801.27	-28507.775	-38512.99	-46309.14	-51235.552	-53061.860	
2	0	-14208.0	-27333.33	-38475.0	-46933.33	-52208.00	-54000.	
1								
		2	3	4	5	6	7	
								X

TABELLA II

Y	-10666.67	-21273.101	-31230.635	-39852.367	-46510.267	-50712.275	-52148.115	
J								
5	-9875.00	-20737.051	-30924.037	-39731.79	-46524.217	-50806.867	-52269.457	
4	-7600.00	-19207.067	-30059.682	-39403.55	-46581.937	-51095.542	-52634.99	
3	-4142.00	-16912.537	-28792.082	-38953.787	-46716.527	-51578.372	-53233.432	
2	0	-14208.00	-27333.33	-38475.0	-46933.33	-52208.00	-5400.00	
1								
		2	3	4	5	6	7	
								X

I valori della tabella riguardano il quadrante inferiore sinistro della regione R per la m_{α} nifesta simmetria delle $u(x,y)$ rispetto ad entrambe le mediane di detta regione.

Poichè risulta identicamente $\sum_1^5 p_r(P) = 1$, se tutte le $p_r(P)$ sono non negative ciascuna di esse può essere considerata come la probabilità di transizione dal punto P al punto P_r



La (10) scritta nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 (11) \quad N u(P) = & N p_1(P) u(P_1) - N p_1(P) h^2 \frac{F(P)}{m(P)} + \\
 & + N p_2(P) u(P_2) - N p_2(P) h^2 \frac{F(P)}{m(P)} + \\
 & + \dots + \\
 & + N p_5(P) u(P_5) - N p_5(P) h^2 \frac{F(P)}{m(P)}
 \end{aligned}$$

mostra chiaramente che se si fanno N transizioni a caso (con N molto grande) dal punto P agli altri punti P_i circostanti, per $N p_1(P)$ volte si andrà dal punto P a quello P_1 , per $N p_2(P)$ volte a quello P_2 e così via in funzione delle probabilità $p_i(P)$, e che ogni transizione porta un contributo alle $u(P)$ espresso da:

$$(12) \quad u(P_j) - h^2 \frac{F(P)}{m(P)} = Z_r$$

con $r = 1, 2, \dots, N$; $j = 1, 2, 3, 4, 5$

Per quanto detto possiamo scrivere la (11) nel seguente modo:

$$(13) \quad u(P) = \frac{1}{N} \sum_1^N Z_r$$

Nel caso in cui i punti P_r non cadano nel contorno di R per ogni punto compreso fra P e quelli sul contorno vale il ragionamento fatto, di conseguenza la Z_r assume la forma:

$$(14) \quad Z_r = u(P) - h^e \sum_m \frac{F(P_m)}{M(P_m)}$$

dove la somma va estesa a tutti i punti toccati escluso quello P di confine.

Questo metodo implica un errore assoluto dato da

$$G = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_r (Z_r - u(P))^2} = \sqrt{\frac{1}{N} \left(\sum_r Z_r^2 + Nu(P)^2 - 2u(P) \sum_r Z_r \right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{N} \sum_r Z_r^2 - (u(P))^2}$$

6) Descrizione del programma "Monte Carlo"

Il diagramma a blocchi descrive dettagliatamente il programma. Il numero di percorsi N è espresso in virgola mobile e ciò per dare un maggior campo di variabilità ad N. La generatrice dei numeri a caso usata è la "Random Number Generator"⁽³⁾ fornita dalla I.B.M.

Si ricorda che questa subroutine richiede, per lo innesco, un blocco di 100 numeri a caso di cui il primo deve avere il flag.

Anche in questo programma le $u(x,y)$ e le $w(x,y)$ vengono individuate da due indici (per esigenza di programma si è cambiato l'indice I dei due programmi precedenti in K). Le $u(x,y)$ vengono lette da nastro e memorizzate secondo la sequenza (5) ed occupano le locazioni di memoria con indirizzo compreso fra la 12981 e la 19990. Le $w(x,y)$ occupa-

no le memorie con indirizzo che va da 5971 a 12980 e vengono lette da nastro secondo la sequenza (6).

I numeri relativi ai valori massimi e minimi degli indici e quelli relativi agli indici individuanti il punto in cui si vuol calcolare la $u_{k,j}$ debbono essere espressi mediante quattro digits di cui il primo col flag. Se, per inavvertenza nello scrivere, i valori degli indici individuanti il punto P in cui si vuol calcolare la $u(P)$, non sono compresi nell'intervallo fissato, si ha la scrittura di un messaggio di errore e la specificazione del valore errato dell'indice, quindi la macchina si ferma in ALT.

Così se richiedessimo la $u_{2,17}$ in questo esempio in cui abbiamo assunto $J \leq 8$, $K \leq 12$, si avrebbe il seguente messaggio:

FUORI DAI LIMITI

J = 0017

Per correggere basta eseguire le seguenti istruzioni:

Reset

Insert

4902850

Release

Start.

così la macchina è pronta nuovamente a ricevere i due indici J e K.

Dopo la stampa del primo risultato se lo switch 1 è in ON si ha la richiesta dei due indici relativi ad un altro punto da calcolare; se lo switch 1 è in OFF e lo switch 2 è in ON è richiesto un nuovo blocco di 100 numeri di innesco della generatrice di numeri a caso, un nuovo numero N di percorsi e gli indici relativi ad un altro punto da calcolare.

Nella tabella III sono dati dei risultati relativi a diversi percorsi e diversi blocchi di innesco, per il problema particolare qui trattato.

TABELLA III

Incognita	n° di percorsi	Risultati	Risult. di cui alla refer.(1)
u_{22}	1000	-16900.116	-16898.00
u_{22}	10000	-16847.5	-16898.00
u_{32}	2000	-28843.058	-28767.6
u_{22}	1000	-16814.607	-16898.00
u_{22}	10000	-16893.273	-16898.00

I risultati sono stati ottenuti con due diversi blocchi di 100 numeri di innesco; il primo blocco è stato utilizzato per il calcolo dei primi tre risultati, l'altro per i rimanenti due.

7) Operazioni alla macchina ed esempi d'uscita

a) Metodo alle differenze

Posizione degli switches

ON per porre le $u(I,J)$

SW1

OFF non esegue la perforazione

SWO-FLOW in program

Gli altri switches non sono interrogati dal programma.

Esempio d'uscita

Valori numerici delle $u(I,J)$ Corrisp. valori degli indici (non vengono stamp.dalla macchina)

	I	J
0000000000	1	1
5514208000	2	1
5527333330	3	1
.....
.....
0000000000	13	1
5441420000	1	2
5516801270	2	2
.....
.....
5441420000	13	2
5476000000	1	3
5518918290	2	3
.....
.....
.....

b) Metodo iterativo

Posizione degli switches.

ON stampa le $u(I,J)$ relative alle iterazioni intermedie

OFF non esegue la stampa

SWO-FLOW in program

Gli altri switches non vengono interrogati dal programma.

Esempio d'uscita

Valori numerici delle $u(I,J)$ | Valori degli indici (non stampati dalla macchina)

	I	J
XXXX-A ITERAZIONE		
0000000000	1	1
5514208000	2	1
5527333330	3	1
.....
.....
.....
0000000000	13	1
5441420000	1	2
5516912537	2	2
5528792082	3	2
.....
.....
.....
5441420000	13	2
5576000000	1	3
5519207067	2	3
.....
.....
.....

FINE DEL PROCEDIMENTO.

Con XXXX si indica il numero d'ordine dell'iterazione.

c) Metodo di Monte Carlo

Tabulazione

Margine sinistro 12

Traguardi intermedi 18,24

Posizione degli switches

ON Dopo la stampa permette l'introd. di
due indici relativi ad un nuovo pun-
to da calcolare

SW1

OFF va ad interrogare lo switch 2

ON Dopo la stampa fa accettare da mac-
china da scrivere 100 num. a caso,
il num. N di percorsi e gli indici
relativi al nuovo punto da calcolare

SW2

OFF Dopo la stampa si ha un ALT

SWO-FLOW in program

Gli altri switches vengono interrogati dal programma.

Esempio d'uscita

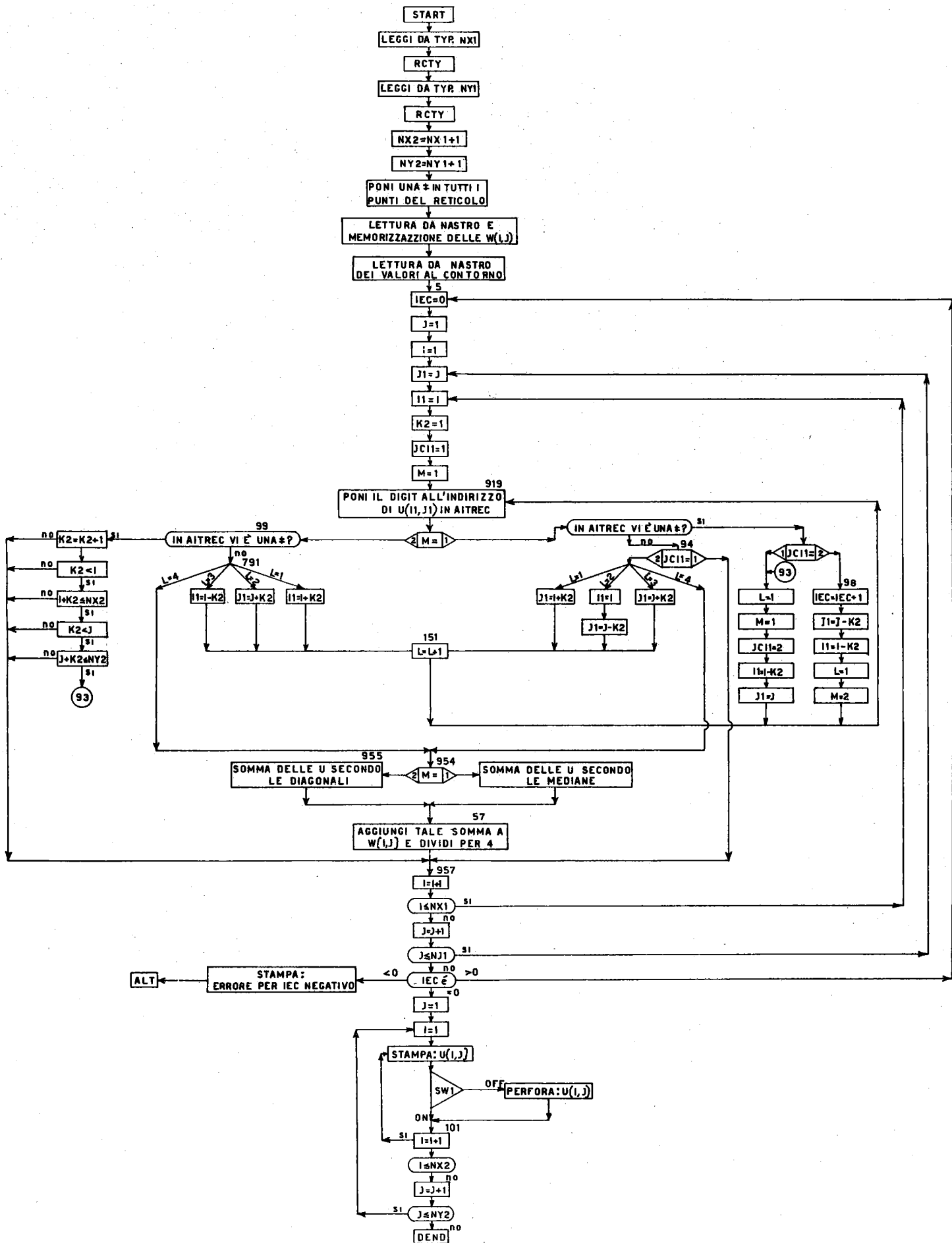
Valori degli indici		Valori delle u(K,J)
K	J	
$\bar{0}002$	$\bar{0}002$	$\bar{5}51690016\bar{6}$
$\bar{0}003$	$\bar{0}002$	$\bar{5}52884305\bar{8}$

Desidero ringraziare vivamente il dott. A. Tur-
rin per i preziosi consigli e l'incoraggiamento datimi du-
rante la stesura di questo lavoro.

Bibliografia

- (1) - Milne: "Numerical Solution of Differential Equation" (1957), pg. 224
- (2) - Petrowoky: "Partial Differential Equations" - Interscience Publisher LTD LONDON (1954), pg. 168
- (3) - Purchase: "System Letter 1620" - June (1961)
- (4) - Ralston, Wilf: "Mathematical Method for Digital Computers" - I. Wiley & Sons, Inc. London (1960), pgg. 144, 157
- (5) - Salvadori, Baron: "Numerical Method in Engineering" - Prentice Hall (1961), pg. 190
- (6) - Scarborough: "Numerical Mathematical Analysis" - Oxford University Press. (1958), pg. 395

DIAGRAMMA BLOCCHI
DEL METODO DELLE DIFFERENZE



* METODO ALLE DIFFERENZE.

* LETTURA DEI VALORI AL CONTORNO.

VIA RNTYNX1-3

RCTY

RNTYNY1-3

RCTY

TF NX2,NX1

AM NX2,1,8

TF NY2,NY1

AM NY2,1,8

TF SR2+59,NY2

TF J,IU1

DOJ TF I,IU1

TF JJ,J

DOI TF II,I

BTM SR2,19990

TF *+18,FSR2+11

TD 00000,MPL

AM 1,1,8

C I,NX2

BNH DOI

AM J,1,8

C J,NY2

BNH DOJ

TF J,IU1

DOJ1 TF I,IU1

TF JJ,J

DOI1 TF II,I

BTM SR2,19990

TF *+30,FSR2+11

RNPTMPLE-10

TF 00000,MPL-1

AM I,1,8

C I,NX2

BNH DOI1

A J,NY1

C J,NY2

BNH DOJ1

TF I,IU1

DOI2 TF J,IU2

TF II,I

DOJ2 TF JJ,J

BTM SR2,19990

TF *+30,FSR2+11

RNPTMPLE-10

TF 00000,MPL-1

AM J,1,8

C J,NY1

BNH DOJ2

A I,NX1

C I,NX2

BNH DOI2
*LETTURA DELLA W.

H
TF J, IU2
DOPJ TF I, IU2
TF JJ, J
DOPI TF II, I
RNPTMPLE-10
BTM SR2, 12980
TF *+18, FSR2+11
TF 00000, MPLE-1
AM I, 1, 8
C I, NX1
BNH DOPI
AM J, 1, 8
C J, NY1
BNH DOPJ

*CALCOLO DELLA VARIABILE DIPENDENTE

*NEI PUNTI INTERNI, SUL RETICOLO.

CINQU TF IEC, ZERO
TF J, IU2
DOJ3 TF I, IU2
DOI3 TF J1, J
TF I1, I
TF K2, IU1
TF JCI1, IU1
TF M, IU1
NUN TF JJ, J1
TF II, I1
BTM SR2, 19990
TF *+23, FSR2+11
TD AITREC, 00000
CM M, 1, 8
BNE NOV2
BNR NOVQUA, AITREC
CM JCI1, 1, 8
BNE NOOTT
NOTRE TF L, IU1
TF M, IU1
TF JCI1, IU2
TF I1, I
S I1, K2
TF J1, J
B NUN
NOVQUACM JCI1, 2
BNE NOCSE
CM L, 1, 8
BNE R1
TF I1, I
A I1, K2
UCU AM L, 1, 8

	B	NUN
R1	CM	L, 2, 8
	BNE	R2
	TF	I1, I
	TF	J1, J
	S	J1, K2
	B	UCU
R2	CM	L, 3, 8
	BNE	NOCIQU
	TF	J1, J
	A	J1, K2
	B	UCU
NOOTT	AM	IEC, 1, 8
	TF	L, IU1
	TF	J1, J
	S	J1, K2
	TF	I1, I
	S	I1, K2
	TF	M, IU2
	B	NUN
NOV2	BNR	SENOU, AITREC
	AM	K2, 1, 8
	C	J, K2
	BNH	NOCSE
	TF	MDL, J
	A	MDL, K2
	C	MDL, NX2
	BH	NOCSE
	C	I, K2
	BNH	NOCSE
	TF	MDL, I
	A	MDL, K2
	C	MDL, NX2
	BH	NOCSE
	B	NOTRE
SENOU	CM	L, 1, 8
	BNE	S2
	TF	I1, I
	A	I1, K2
	B	UCU
S2	CM	L, 2, 8
	BNE	S3
	TF	J1, J
	A	J1, K2
	B	UCU
S3	CM	L, 3, 8
	BNE	NOCIQU
	TF	I1, I
	S	I1, K2
	B	UCU
NOCIQUTF	NI1, I	

S NI1,K2
TF NI2,I
A NI2,K2
TF NI3,J
S NI3,K2
TF NI4,J
A NI4,K2
CM M,1,8
BNE NOCC
TF II,I
TF JJ,NI3
BTM SR2,19990
TF *+23,FSR2+11
TF AITT,00000
TF JJ,NI4
BTM SR2,19990
TF *+47,FSR2+11
FA AITT,00000
TF JJ,J
TF II,NI2
BTM SR2,19990
TF *+47,FSR2+11
FA AITT,00000
TF II,NI1
BTM SR2,19990
TF *+47,FSR2+11
FA AITT,00000
CSET BT SR1,K2
CM M,1,8
BE CSET1
FM FLO,RAD2
TF FLO,99
CSET1 TF CIC,FLO
FM CIC,FLO
TF CIC,99
TF II,I
TF JJ,J
BTM SR2,12980
TF *+23,FSR2+11
TF MDL1,00000
FM MDL1,CIC
TF MDL1,99
FS AITT,MDL1
FM AITT,USQUA
TF MDL1,99
TF II,I
TF JJ,J
BTM SR2,19990
TF *+18,FSR2+11
TF 00000,MDL1
B NOCSE

NOCC TF II,NI1
 TF JJ,NI3
 BTM SR2,19990
 TF *+23,FSR2+11
 TF AITT,00000
 TF II,NI2
 TF JJ,NI3
 BTM SR2,19990
 TF *+47,FSR2+11
 FA AITT,00000
 TF JJ,NI4
 BTM SR2,19990
 TF *+47,FSR2+11
 FA AITT,0000
 TF II,NI1
 BTM SR2,19990
 TF *+47,FSR2+11
 FA AITT,0000
 B CSET
 NOCSE AM I,1,8
 C I,NX1
 BNH DO13
 AM J,1,8
 C J,NY1
 BNH DOJ3
 CM IEC,0,8
 BE DP1
 BH CINQU
 WATYFURE-46
 H
 DP1 TF J,IU1
 DOJ4 TF I,IU1
 TF JJ,J
 DOI4 TF II,I
 BTM SR2,19990
 TF *+23,FSR2+11
 TF STAM-1,00000
 WNTYSTAM-10
 RCTY
 BC1 UZU
 WNPTSTAM-10
 UZU AM I,1,8
 C I,NX2
 BNH DOI4
 AM J,1,8
 C J,NY2
 BNH DOJ4
 H
 SR2 TF FSR2+11,SR2-1
 TF IPSR,II
 TF ISSR,JJ

	SM	IPSR, 1, 8
	MM	IPSR, 0
	SF	96
	TF	IPSR, 99
	SM	ISSR, 1, 8
	S	*+34, IPSR
	S	*+22, ISSR
FSR2	BB	00000, 00000
	NOP	
SR1	TF	FLO-6, ZZ
	CM	SR1-1, 10, 8
	BNN	F1
	TD	FLO-7, SR1-1
	TDM	FLO-8, 1
	BB	
F1	TD	FLO-6, SR1-1
	TD	FLO-7, SR1-2
	TDM	FLO-8, 2
	BB	
	NOP	
NX1	DS	4
NY1	DS	4
NX2	DS	4
NY2	DS	4
AITT	DS	10
MDL1	DS	10
CIC	DS	10
J	DS	4
I	DS	4
JJ	DS	4
II	DS	4
J1	DS	4
I1	DS	4
IEC	DS	4
JCI1	DS	4
L	DS	4
M	DS	4
NI1	DS	4
NI2	DS	4
NI3	DS	4
NI4	DS	4
IPSR	DS	4
ISSR	DS	4
K2	DS	4
MDL	DS	4
IU1	DC	4, 1
IU2	DC	4, 2
ZERO	DC	4, 0
ZZ	DC	3, 0
RAD2	DC	10, 5114142136
FLO	DC	10, 5000000000

USQUA DC 10,5025000000
MPLE DC 11,
STAM DC 11,
FURE DAC 24,ERRORE PER IEC NEGATIVO
AITRECDC 2,0
DENDVIA

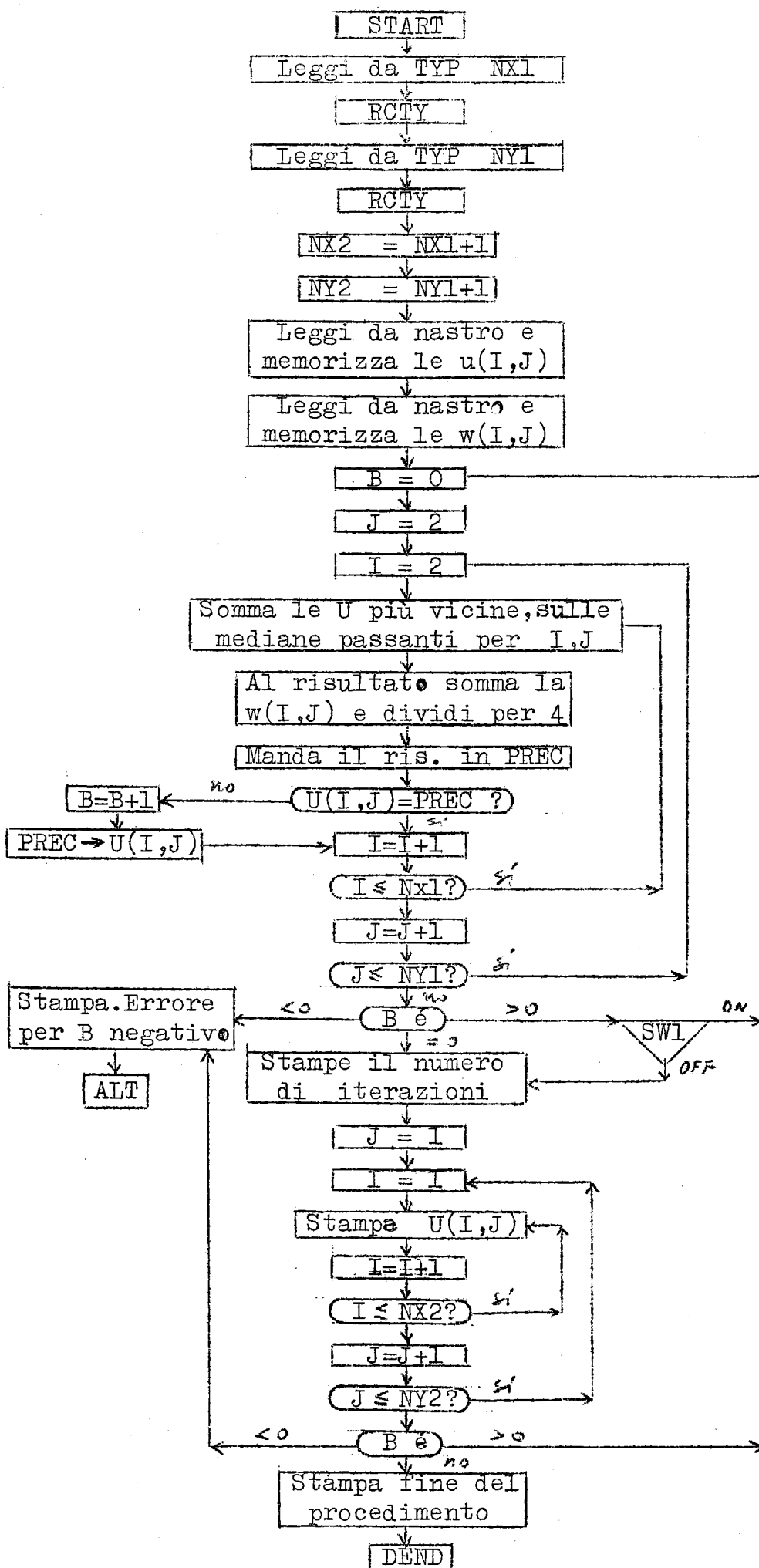


DIAGRAMMA A BLOCCHI DEL PROCEDIMENTO DI ITERAZIONE

- * PROCEDIMENTO ITERATIVO.
- * SW1-OFF PER STAMPARE I RISULTATI INTERMEDI.
- * NX1=NUMERO DI DIVISIONI LUNGO L'ASSE X.
- * NY1=NUMERO DI DIVISIONI LUNGO L'ASSE Y.
- * LETTURA DEI VALORI DELLA FUNZIONE
- * NEI PUNTI DEL RETICOLO.

VIA RNTYNX1-3
 RCTY
 RNTYNY1-3
 RCTY
 TF NX2,NX1
 AM NX2,1,8
 TF NY2,NY1
 AM NY2,1,8
 TF SR2+59,NY2
 TF J,IU1
 DOJ1 TF I,IU1
 DOI1 RNPTMPLE-10
 TF JJ,J
 TF II,I
 BTM SR2,19990
 TF *+18,FSR2+11
 TF 00000,MPLE-1
 AM I,1,8
 NOP
 C I,NX2
 BNH DOI1
 AM J,1,8
 C J,NY2
 BNH DOJ1

*LETTURA DELLE W.

TF J,IU2
 DOPJ TF I,IU2
 DOI1 TF JJ,J
 TF II,I
 BTM SR2,12980
 RNPTMPLE-10
 TF *+18,FSR2+11
 TF 00000,MPLE-1
 AM I,1,8
 C I,NX1
 BNH DOI1
 AM J,1,8
 C J,NY1
 BNH DOPJ

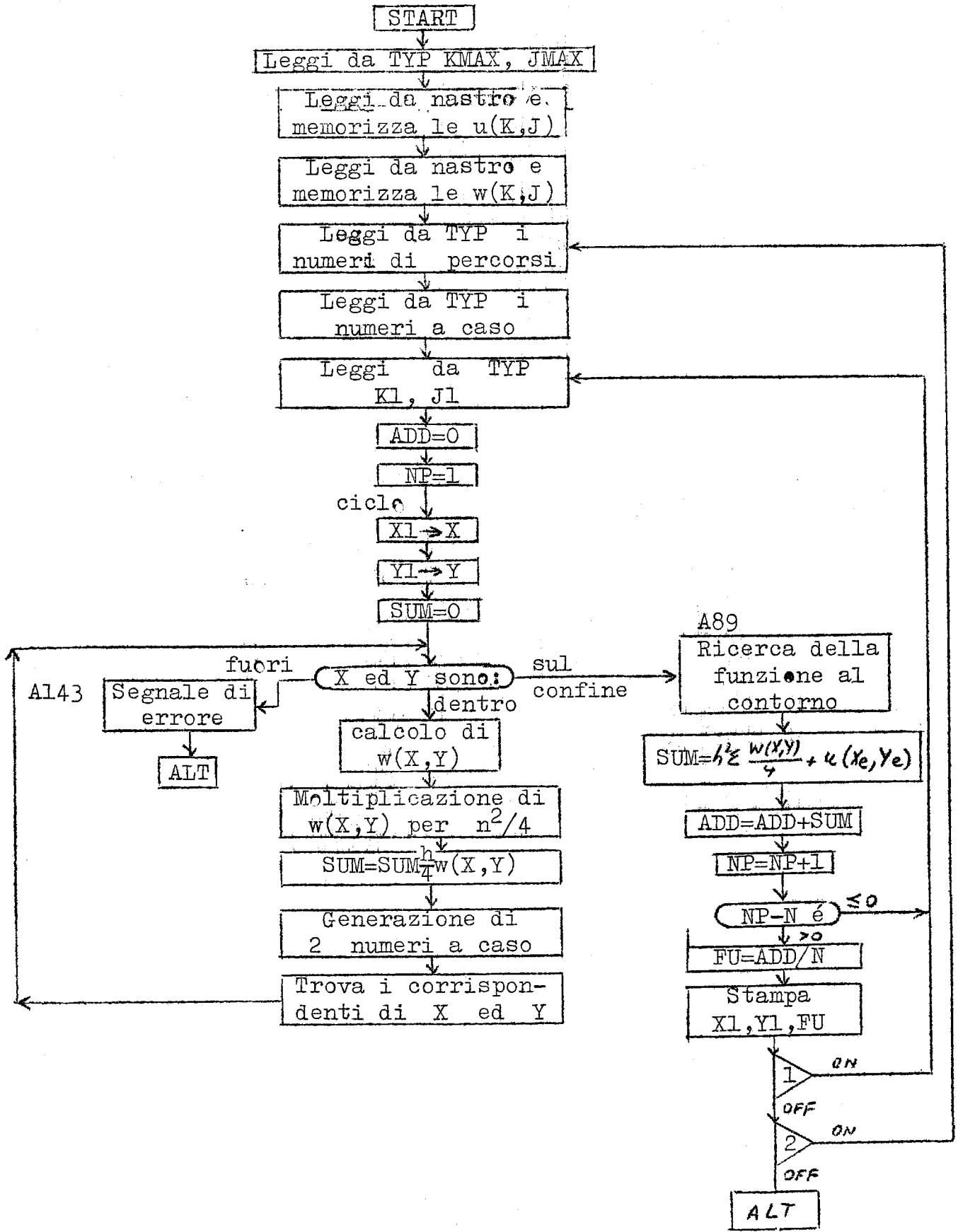
*PROCESSO DI ITERAZIONE

BIUN TF B,ZERO
 TF J,IU2
 DOJ2 TF I,IU2
 DOI2 TF NI1,J
 SM NI1,1,8
 TF NI2,J

AM NI2,1,8
TF II,I
TF JJ,NI1
BTM SR2,19990
NOP
TF *+23,FSR2+11
TF PPSOM,00000
TF JJ,NI2
BTM SR2,19990
NOP
TF *+47,FSR2+11
FA PPSOM,00000
TF JJ,J
TF NI3,I
SM NI3,1,8
TF NI4,I
AM NI4,1,8
TF II,NI3
BTM SR2,19990
NOP
TF *+47,FSR2+11
FA PPSOM,00000
TF II,NI4
BTM SR2,19990
NOP
TF *+47,FSR2+11
FA PPSOM,00000
TF II,I
TF JJ,J
BTM SR2,12980
TF *+47,FSR2+11
FS PPSOM,00000
FM PPSOM,QUARTO
TF PPSOM,99
TF II,I
TF JJ,J
BTM SR2,19990
NOP
TF BITRES+6,FSR2+11
TF *+23,FSR2+11
TF PREC,00000
C PREC,PPSOM
BE BITRES
BIDUS FA B,UNU
BITRESTF 00000,PPSOM
AM I,1,8
C I,NX1
NOP
BNH DOI2
AM J,1,8
C J,NY1
NOP

BNH DOJ2
 AM ITT,1,8
 C B,ZERO
 BN TRIDU
 BE TRES
 BICIN BC1 BIUN
 TRES TD ITERA,ITT-3
 TD ITERA+2,ITT-2
 TD ITERA+4,ITT-1
 TD ITERA+6,ITT
 WATYITERA
 RCTY
 TF J,IU1
 DOJ3 TF I,IU1
 DOI3 TF II,I
 TF JJ,J
 NOP
 BTM SR2,19990
 TF *+23,FSR2+11
 TF STAM-1,00000
 WNTYSTAM-10
 RCTY
 AM I,1,8
 C I,NX2
 NOP
 BNH DOI3
 AM J,1,8
 C J,NY2
 BNH DOJ3
 C B,ZERO
 BE TRITRE
 BH BIUN
 TRIDU WATYERR
 RCTY
 H
 TRITREWATYFINE
 RCTY
 H
 SR2 TF FSR2+11,SR2-1
 TF IPSR,II
 TF ISSR,JJ
 SM IPSR,1,8
 MM IPSR,0
 SF 96
 TF IPSR,99
 SM ISSR,1,8
 S *+34,IPSR
 S *+22,ISSR
 FSR2 BB 00000,00000
 NOP
 I DS 4
 J DS 4

JJ	DS	4
II	DS	4
NI1	DS	4
NI2	DS	4
NI3	DS	4
NI4	DS	4
NX1	DS	4
NY1	DS	4
NX2	DS	4
NY2	DS	4
IPSR	DS	4
ISSR	DS	4
IU2	DC	4,2
IU1	DC	4,1
ITT	DC	4,0
B	DS	10
PREC	DS	10
PPSOM	DS	10
MPLE	DS	11
STAM	DC	11, @
ZERO	DC	10,0000000000
UNU	DC	10,5110000000
QUARTO	DC	10,5025000000
ITERA	DAC	18,0000-A ITERAZIONE @
FINE	DAC	22,FINE DEL PROCEDIMENTO @
ERR	DAC	22,ERRORE PER B NEGATIVO @
		DENDVIA



METODO DI MONTECARLO

*METODO DI MONTECARLO PER LA RISOLUZIONE DI
*EQUAZIONI DI POISSON.

*

*N=NUMERO DI PERCORSI

*SW1-ON PER CALCOLARE LA VARIABILE DIPENDENTE IN UN NUOVO PUNTO.

*SW2-ON PER VARIARE IL NUMERO DI PERCORSI.

*

*DIMENSIONI DEGLI INDICI K, J.

PARTE RNTYKMAX-3

RCTY

RNTYJMAX-3

RCTY

TF JMIN, JMAX

SM JMIN, 1, 8

TF KMIN, KMAX

SM KMIN, 1, 8

TF SR2+59, JMAX

*LETTURA DEI V LORI AL CONTORNO.

TF J, IU1

DOJ1 TF K, U1

TF JJ, J

DOK1 TF KK, K

BTM SR2, 19990

TF *+30, FSR2+11

RNPTMPLE-10

TF ,MPLE-1

AM K, 1, 8

C K, KMAX

BNH DOK1

A J, JMIN

C J, JMAX

BNH DOJ1

TF K, IU1

DOK2 TF J, IU2

TF KK, K

DOJ2 TF JJ, J

BTM SR2, 19990

TF *+30, FSR2+11

RNPTMPLE-10

TF ,MPLE-1

AM J, 1, 8
C J, JMIN
MNH DOJ2
A K, KMIN
C K, KMAX
BNH DOK2

* LETTURA DELLE W.

NOP
TF J, IU2
DOPJ TF K, IU2
TF JJ, J
DOPK TF KK, K
RNPTMPLE-10
BTM SR2, 12980
TF *+18, FSR2+11
TF ,MPLE-1
AM K, 1, 8
C K, KMIN
BNH DOPK
AM J, 1, 8
C J, JMIN
BNH DOPJ

* NUM. DI PERCORSI E NUM. A CASO.

VIA RNTYN-9
RCTY
RNTYZRANDZ-99
RCTY
VIA1 RNTYK1-4
RCTY
RNTYJ1-4
RCTY
FD UNO, N
TF DNM1, 99

* CONTROLLO DEGLI INDICI E CALCOLO DELLA U(K, J).

TF ADD, ZERO
TF NP, UNO
CICLO TF K, K1-1
TF J, J1-1
TF SUM, ZERO
COLIMICM K, 1, 8
BH SCO1
BE A89
TDM MES2, 2
BT SDE, K
SCO1 C KMAX, K
BH SCO2
BE A89
TDM MES2, 2
BT SDE, K
SCO2 CM J, 1, 8
BH SCO3

BE A89
 TDM MES, 1
 BT SDE, J
 SCO3 C JMAX, J
 BH SCO4
 BE A89
 TDM MES2, 1
 BT SDE, J
 SCO4 TF KK, K
 TF JJ, J
 BTM SR2, 12980
 TF *+47, FSR2+11
 FA SUM, 00000

*RICERCA DI DUE NUOVI INDICI.

TFM RANDOM+11, *+35
 TFM RANDOM+294, GNAC
 B RANDOM, 2, 7
 TD NAC1, GNAC-1
 CF NAC1
 TD NAC2, GNAC
 CM NAC1, 5
 BNN A559
 CM NAC2, 5
 BNN A459
 SM J, 1, 8
 B COLIMI
 A459 AM K, 1, 8
 B COLIMI
 A559 CM NAC2, 5
 BNN A759
 SM K, 1, 8
 B COLIMI
 A759 AM J, 1, 8
 B COLIMI
 A89 FM QUARTO, SUM
 TF SUM, 99
 TF KK, K
 TF JJ, J
 BTM SR2, 19990
 TF *+47, FSR2+11
 FA SUM, 00000
 FA ADD, SUM
 A891 FA NP, UNO
 C NP, N
 BNH CICLO
 TF FU, ADD
 FM FU, DNM1
 TF FU, 99
 A892 WNTYK1-4
 TBTY
 WNTYJ1-4
 TBTY

TF STAM-1, FU
 WNTYSTAM-10
 A893 RCTY
 BC1 VIA1
 BC2 VIA
 H
 SR2 TF FSR2+11, SR2-1
 TF IPSR, KK
 TF ISSR, JJ
 SM IPSR, 1, 8
 MM IPSR, 0
 SF 96
 TF IPSR, 99
 SM ISSR, 1, 8
 S *+34, IPSR
 S *+22, ISSR
 FSR2 BB 00000, 00000
 NOP
 SDE WATYMES1
 RCTY
 WATYMES2
 TF MES3-1, SDE-1
 WNTYMES3-4
 RCTY
 H
 K DS 4
 J DS 4
 KK DS 4
 JJ DS 4
 KMAX DS 4
 KMIN DS 4
 JMAX DS 4
 JMIN DS 4
 IPSR DS 4
 ISSR DS 4
 K1 DC 5, @
 J1 DC 5, @
 NAC1 DC 5, 0
 NAC2 DC 5, 0
 N DS 10
 NP DS 10
 FU DS 10
 ADD DS 10
 SUM DS 10
 MDL DS 10
 DNM1 DS 10
 ZERO DC 10, 0
 UNO DC 10, 5110000000
 QUARTO DC 10, -5025000000
 STAM DC 11, @
 MPLE DC 11, @
 MES1 DAC 17, FUORI DAI LIMITI @

MES2 DAC 3, J=@
 MES3 DC 5, @
 IU1 DC 4, 1
 IU2 DC 4, 2
 RANDOMTF RANDOM+107, 0
 TFM ZRANDZ-100, ZRANDZ
 S ZRANDZ-100, *+275
 ZRANDZ-100, RANDOM+107
 BN *+60
 TF RANDOM+306, RANDOM+282
 A RANDOM+282, RANDOM+107
 A RANDOM+299, RANDOM+107
 B RANDOM+276, , 7
 TF *+18, *+174
 CF 0
 SF ZRANDZ-99
 TF ZSUMMZ-3, ZRANDZ
 TFM ZSUMMZ, , 9
 CF ZSUMMZ-2
 S ZSUMMZ-1, ZRANDZ
 A ZSUMMZ, ZRANDZ
 SF ZSUMMZ-101
 TF ZRANDZ, ZSUMMZ-2
 TFM *+71, ZRANDZ-100
 A *+59, RANDOM+107
 TFM *+30, ZRANDZ-99
 A *+18, RANDOM+107
 SF ZRANDZ-99, , 2
 TF , ZRANDZ-100, 7
 CF , , 2
 TF *+30, RANDOM+11
 AM *+18, 1
 B , , 7
 ZRANDZDS 100
 DC 1, @
 ZSUMMZDS 103
 GNAC DS 2
 DENDPARTE